Die Exponentialfunktion

Definition:
Eine Funktion $f: x \mapsto a^x$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ heißt Exponentialfunktion.

Beispiele:

1) Zinseszins: $K_n = K_0(1+\frac{p}{100})^n$ mit n = Laufzeit in Jahren, p = Zinssatz in %
„Exponentielles Wachstum"

2) Bakterienvermehrung: $f(t) = 8 \cdot 2^t$ mit f(t) Anzahl der Bakterien in Tausend und
t = Zeit in Stunden
„Exponentielles Wachstum"

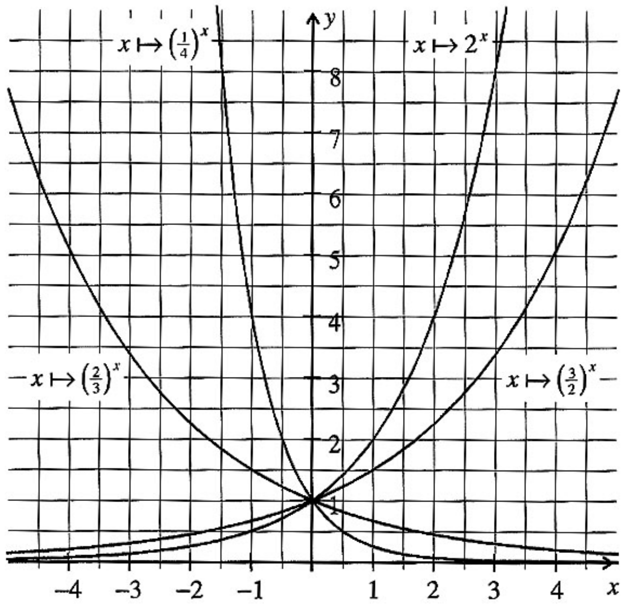
3) Halbwertszeiten von radioaktiven Atomen:
Radium 226 z.B. hat eine Halbwertszeit von 1600 Jahren

$M(t) = M(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$ mit t = Zeit in Jahren und M(0) = Anfangsmasse in g

„Exponentielle Abnahme"

4) Bierschaumzerfall: $h(t) = 60 \cdot 2{,}7^{-0{,}3527t}$ mit h(t) Schaumhöhe in mm und
t = Zeit in Minuten
„Exponentielle Abnahme"

Graphen von Exponentialfunktionen:



Eigenschaften der Exponentialfunktion:

1. Definitions- und Wertemenge: $D = \mathbb{R}$ $W = \mathbb{R}^+$

2. Schnittpunkte mit den Achsen: keine Nullstellen $S_y(0/1)$ für alle $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

3. Monotonieverhalten: $a > 1: G_f$ sms $0 < a < 1: G_f$ smf

4. Grenzverhalten:

$a > 1$: $\lim\limits_{x\to\infty}(a^x)$ existiert nicht $a^x \to \infty$ für $x \to \infty$

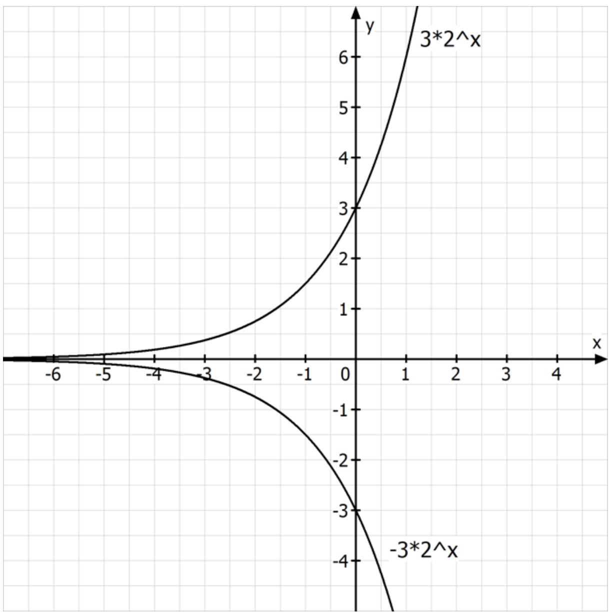
$\lim\limits_{x\to-\infty}(a^x) = 0$

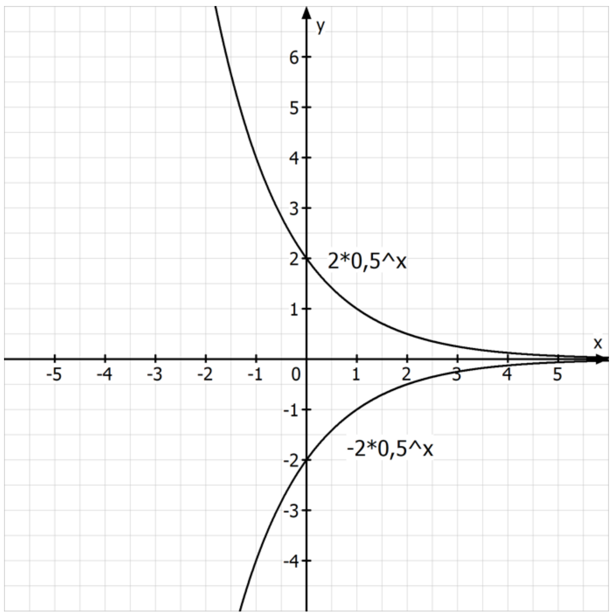
$0 < a < 1$: $\lim\limits_{x\to\infty}(a^x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(a^x)$ existiert nicht $a^x \to \infty$ für $x \to -\infty$

Die Funktion $f(x) = b \cdot a^x$ mit $a \in R^+ \setminus \{1\}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

Beispiele: $f(x) = 3 \cdot 2^x$ und $f(x) = -3 \cdot 2^x$ $f(x) = 2 \cdot (\frac{1}{2})^x$ und $f(x) = -2 \cdot (\frac{1}{2})^x$





Aufgaben:

1.0 Handelt es sich bei den folgenden Sachverhalten um exponentielles Wachstum bzw. exponentiellen Zerfall (ohne Hilfsmittel) ?

1.1 Jährlicher Wertverlust eines Autos von 6%.

1.2 Abkühlung eines Tees.

1.3 Abbrennen einer Kerze.

1.4 Vermehrung von Bakterien.

1.5 Schneeballsystem – eine Person informiert jeweils drei andere

1.6 Alkoholpegel

2.0 Ein Wald mit 200000 m^3 Holzbestand wächst gleichmäßig um 5 % pro Jahr.

2.1 Geben Sie die Funktionsgleichung an, die diesen Zusammenhang beschreibt.

2.2 Berechnen Sie den Wert für t = -5 und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

3 Ein elastischer Ball fällt aus zwei Meter Höhe auf eine feste Unterlage und springt nach jedem Aufprall jeweils drei Viertel der letzten Höhe nach oben.
Erstellen Sie die Funktionsgleichung, die die Höhe des Balls nach dem n-ten Aufprall angibt.
Welche Definitionsmenge ist sinnvoll ?
Ermitteln Sie, wie hoch der Ball nach dem vierten Aufprall springt.

4.0 Die Wachstumsrate der Erdbevölkerung beläuft sich in etwa auf 1,2 % pro Jahr.

4.1 Recherchieren Sie, wie viele Menschen heute auf der Erde leben.

4.2 Berechnen Sie anhand der gegebenen Wachstumsrate und der Zahl aus 4.1, wie viele Menschen vor 20 Jahren auf der Erde lebten.

4.3 Berechnen Sie durch Ausprobieren, in wie vielen Jahren 10 Milliarden Menschen auf der Erde leben werden.

5.0 Bei einer Operation wird für die Narkose ein Medikament verwendet, das exponentiell abgebaut wird. Dabei halbiert sich die Menge des Wirkstoffs im Blut alle 40 Minuten.

5.1 Berechnen Sie den Zerfallsfaktor b in der Einheit 1/min auf vier Dezimalstellen genau.

5.2 Berechnen Sie, wie viel Prozent des Medikaments pro Minute zerfallen.

5.3 Wie viel Prozent der ursprünglichen Menge sind nach zehn Minuten noch übrig ?

5.4 Eine Patientin erhält zuerst 2 mg des Medikaments, danach zweimal in Abständen von einer Stunde je 1 mg.
Berechnen Sie die Gesamtmenge des Medikaments im Körper der Patientin nach der letzten Infusion.

6.0 Mithilfe der Zinseszinsformel kann das aktuelle Kapital K_n berechnet werden:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \ .$$

6.1 Erklären Sie mithilfe der Parameter K_0, p und n den Aufbau der Formel.

6.2 Berechnen Sie, wie viel Geld bei einem Anlagekapital von 1500 Euro und einem festen jährlichen Zinssatz von 1,5 % nach fünf Jahren angespart ist.

7.0 Von einem radioaktiven Stoff sind ursprünglich 320 g vorhanden.
Nach drei Jahren sind es noch 5 g.

7.1 Berechnen Sie die jährliche Zerfallsrate des Stoffs.

7.2 Finden Sie die Halbwertszeit durch Probieren heraus.

Lösungen:

1.1 Exponentieller Zerfall; konstante Zerfallsrate in gleichen Zeitabschnitten

1.2 Exponentieller Zerfall; konstante Zerfallsrate in gleichen Zeitabschnitten

1.3 Exponentieller Zerfall, der aber von mehreren Parametern abhängt und sich damit nicht durch eine Funktion der Form $f(t) = a \cdot b^t$ beschreiben lässt.

1.4 Exponentielles Wachstum; konstante Wachstumsrate in gleichen Zeitabschnitten

1.5 Exponentielles Wachstum; konstante Wachstumsrate in gleichen Zeitabschnitten

1.6 Exponentieller Zerfall, der aber von sehr vielen Parametern abhängt und sich damit nicht durch eine Funktion der Form $f(t) = a \cdot b^t$ beschreiben lässt.

2.1 $f(t) = 200000 \cdot 1{,}05^t$ t Zeit in Jahren f(t) Waldbestand zum Zeitpunkt t

2.2

$f(-5) \approx 156705{,}23\,m^3$

Holzbestand fünf Jahre vor Beobachtungsbeginn in m^3

3

n: Aufprallzahl auf dem Boden f(n): Höhe nach dem n-ten Aufprall

$f(n) = 2 \cdot 0{,}75^n$

Definitionsbereich:

n ganzzahlig und größer gleich null;

mit dem Taschenrechner ermittelt man, dass der Ball nach dem 20. Aufprall praktisch keine Rücksprunghöhe mehr aufweist

$\Rightarrow 0 \leq n \leq 20$

Nach dem vierten Aufprall: $f(4) \approx 0{,}633$ m

4.1 Im Jahr 2014 etwa 7,4 Milliarden Menschen

4.2 $f(-20) = 7{,}4 \cdot 10^9 \cdot 1{,}012^{-20} \approx 5{,}8 \cdot 10^9$ Menschen

4.3

$f(t) = 7{,}4 \cdot 10^9 \cdot 1{,}012^t = 10 \cdot 10^9$ Menschen

Durch Probieren: $f(25) \approx 9{,}97 \cdot 10^9$ Menschen

$f(26) \approx 10{,}09 \cdot 10^9$ Menschen

In 26 Jahren leben mehr als 10 Milliarden Menschen auf der Welt.

5.1

t: Zeit seit Injektion des Narkosewirkstoffs in Minuten

$f(t)$: Noch im Körper befindliche Menge des Narkosewirkstoffs zum Zeitpunkt t

Halbwertszeit 40 Minuten: $f(40)=\frac{1}{2}\cdot f(0) \quad \Rightarrow \frac{1}{2}a=a\cdot b^{40} \quad \Rightarrow b=\sqrt[40]{0{,}5}=0{,}9828$

5.2

$f(0)=a; \quad f(1)=a\cdot 0{,}9828$ noch vorhanden

Zerfall pro Minute: $f(1)-f(0)=-0{,}0172\cdot a$

1,72 % des Medikaments zerfällt pro Minute

5.3

$f(10)=a\cdot 0{,}9828^{10}\approx 0{,}8407a$

Also sind noch 84,97 % der ursprünglichen Menge nach 10 Minuten übrig.

5.4

$f(0)=2=a \quad \Rightarrow f(60)=2\cdot 0{,}9828^{60}\approx 0{,}7062\,\text{mg}$

Injektion von 1mg: 1,7062

$\Rightarrow f(60)=1{,}7062\cdot 0{,}9828^{60}\approx 0{,}6025\,\text{mg}$

Injektion von 1 mg: 1,6025 mg unmittelbar nach der zweiten Injektion

6.1

K_0: Startkapital $\quad p$: Zinssatz mal 100

n: Anzahl der Jahre, in denen das Geld angelegt wurde

Zu dem Zinssatz wird 1 addiert, da sich das aktuelle Kapital
durch die Zinsen vermehrt. Diese Summe wird mit der Anzahl der Anlagejahre
potenziert. Anschließende Multiplikation mit dem Startkapital
ergibt das aktuelle Kapital.

6.2 $K_5=1500\cdot\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right)^5=1615{,}93$ €

7.1

$320\cdot b^3=5 \quad \Rightarrow b=\sqrt[3]{\frac{5}{320}}=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow 25\%$

Die jährliche Zerfallsrate beträgt 75 %.

7.2

$f(t)=320\cdot 0{,}25^t \quad \Rightarrow 0{,}25^t=0{,}5 \quad \Rightarrow t=0{,}5$

Die Halbwertszeit beträgt 0,5 Jahre.